

# Spiegeln an einem Punkt

## DIE SPIEGELVORSCHRIFT

Nach den Erfahrungen mit Makros beim Geradenspiegeln und Drehen können wir uns jetzt eine zusammenfassende Strategie für das Definieren von Makros bei Abbildungsvorschriften überlegen. Bei diesen Makros ging es bisher und geht es auch im folgenden darum, zu jeder Standardvorschrift für das Abbilden der im Menü ERZEUGEN aufgelisteten Basisobjekte Punkt, Gerade, Kreis, sowie Strecke und Dreieck Makros zu definieren, die (abgesehen von ihrer didaktischen Bedeutung) erheblich zur Entlastung beim Konstruieren beitragen.

- Bei jeder Standardvorschrift wird zunächst ein Makro für das Abbilden eines Punktes definiert. Dieses Makro hat nicht nur eigenständige Bedeutung, sondern bildet auch die Grundlage für alle weiter zu definierenden Makros (die also Makros von Makros sind), weil die Punkte die Basisobjekte der abzubildenden Figuren sind.
- Beim Makro für das Abbilden einer Geraden müssen auf der Urgeraden zwei Punkte gegeben und abgebildet werden. Um das Makro zu definieren, bildet man diese beiden Punkte der Urgeraden (mit dem Makro für Punkte) ab und zeichnet durch die Bildpunkte die Bildgerade. Dabei ist es ohne Belang, ob es sich bei der Urgeraden um eine "Gerade durch 2 Punkte" oder eine "Gerade" mit zwei "Punkten auf Objekt" handelt. Beide Möglichkeiten werden vom selben Makro abgedeckt.
- Beim Makro für das Abbilden eines Kreises verhält es sich entsprechend: Es müssen zwei Punkte des Urkreises gegeben und abgebildet werden. Das muß einmal sein Mittelpunkt und außerdem ein Kreispunkt sein. Für die Definition des Makro bildet man diese beiden Punkte (mit dem Makro für Punkte) ab und zeichnet durch die Bildpunkte den Bildkreis. Dabei ist es wieder sowohl für die Definition als auch für das spätere Aufrufen des Makro ohne Belang, ob es sich um einen "Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt" oder einen "Kreis" mit "Kreismittelpunkt" und einem "Punkt auf Objekt" handelt.
- Zum Abbilden von Strecken haben wir kein eigenes Makro definiert. Es kann natürlich bei Bedarf jederzeit definiert und der Sammlung von Makros hinzugefügt werden. (Endpunkte der Urstrecke abbilden, Bildpunkte durch eine Strecke verbinden. Eingabeobjekt: Urstrecke, Zielobjekt: Bildstrecke)
- Beim Makro für das Abbilden von Dreiecken bilden wir zunächst die Eckpunkte des Urdreiecks (mit dem Makro für Punkte) ab und markieren mit den drei Bildpunkten ein "Dreieck", es ist das Bilddreieck.

Nach dieser Strategie verfahren wir jetzt bei der Punktspiegelvorschrift und auch später bei der Verschiebevorschrift, weshalb wir uns von nun an kürzer fassen können.

Beim Drehen haben wir den Fall ausgeklammert, daß der Drehwinkel 180 Grad beträgt. Diesen Fall greifen wir jetzt auf und sehen uns die Vorschrift "Drehen um 180 Grad" am Bildschirm noch einmal an. Wir stellen fest: Drehpunkt, Ursprung und Bildpunkt liegen stets auf einer Geraden, der Bildpunkt ist vom Drehpunkt genau so weit entfernt wie der Ursprung (und jeder Kreis um D ist Fixkreis). Daraus läßt sich eine einfachere ergebnisgleiche Abbildungsvorschrift ableiten, die man **Punktspiegelvorschrift** und den Drehpunkt **Spiegelpunkt** nennt:

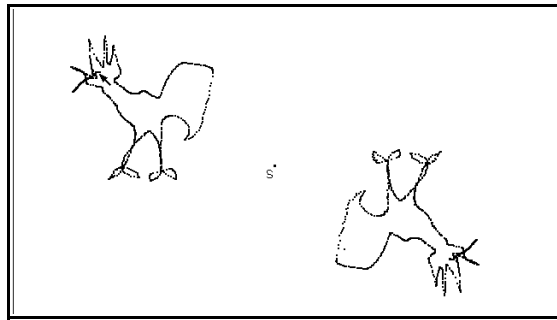
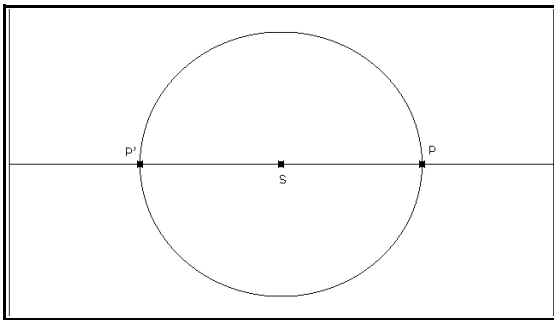
| (1) Den Spiegelpunkt S zeichnen ("Punkt")

- (2) Einen Ursprung P zeichnen ("Punkt")
- (3) Den Bildpunkt so konstruieren:
- Die Gerade durch S und P zeichnen ("Gerade durch 2 Punkte")
  - Den Kreis um S durch P zeichnen ("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")
  - Gerade und Kreis schneiden ("Schnitt")
- (4) Der eine Schnittpunkt ist P. Den anderen Schnittpunkt nennen wir P'. Er ist der Bildpunkt von P.

Aus der Konstruktionsvorschrift ergibt sich das **Makro Punktspiegeln**:

Eingabeobjekte:	Spiegelpunkt S, Ursprung P
Zielobjekt:	Bildpunkt P'.

Dieses Makro findet man, allerdings mit umgekehrter Reihenfolge der Eingabeobjekte, unter der Bezeichnung "Symmetrischer Punkt" im Menü KONSTRUKTION (zusammen mit dem Makro Geradenspiegeln). Den Ursprung mit der Zughand greifen und in der Zeichenebene wandern lassen, dabei den Bildpunkt beobachten. Wir können auch wieder freihandzeichnen (Option ORTSLINIE aufrufen, Shift-Taste drücken, Ur- und Bildpunkt anklicken, den Ursprung mit der Zughand greifen). Dabei erhalten wir eine Urfigur und eine Bildfigur, beide zusammen ergeben eine **punktsymmetrische Figur**.



Punktspiegeln und Drehen um 180 Grad sind demnach zwei ergebnisgleiche Vorschriften. Sie gehören also zu ein und derselben Abbildung, die man **Punktspiegelung** nennt. Die eben definierte Punktspiegelvorschrift ist die Standardvorschrift der Punktspiegelung.

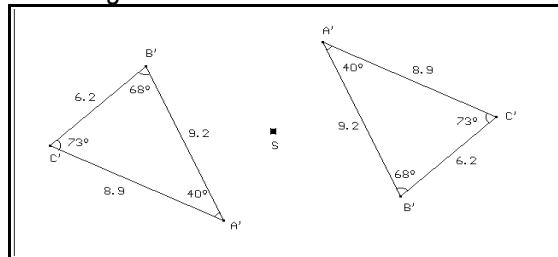
## DIE PUNKTSPIEGELVORSCHRIFT IST EINE KONGRUENZ-VORSCHRIFT

- Wir lassen den Ursprung P auf der ganzen Zeichenebene wandern. Stets gibt es auch einen Punkt P' auf der Zeichenebene, der entsprechend wandert. Die Punktspiegelvorschrift bildet die Zeichenebene auf sich ab.
- Kommt dabei der Ursprung P auf den Spiegelpunkt S zu liegen, so liegt auch P' auf S. Der Spiegelpunkt ist der einzige Fixpunkt der Punktspiegelvorschrift.
- Wandert P an die Stelle von P', so wandert P' an die Stelle von P. **Die Punktspiegelvorschrift ist wechselseitig.**
- Wir spiegeln ein Dreieck an einem Punkt S (die drei Ecken einzeln punktspiegeln und auf die Bildpunkte das Makro DREIECK anwenden). Damit definieren wir das **Makro Punktspiegeln-Dreieck**:

Eingabeobjekte:	Spiegelpunkt S, Urdreieck ABC
Zielobjekt:	Bilddreieck A'B'C'

Den Spiegelpunkt und das Urdreieck variieren. Dabei soll der Spiegelpunkt außerhalb/innerhalb des Dreiecks, auf einer Seite oder in einer Ecke liegen.

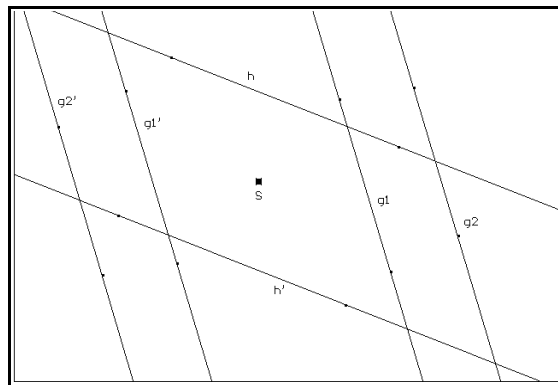
- Wir messen die Seitenlängen und Eckenwinkel (zuerst markieren!) von Ur- und Bilddreieck und beobachten: Ur- und Bildstrecken sind gleichlang, Ur- und Bildwinkel sind gleichgroß, Ur- und Bilddreiecke sind deshalb deckungsgleich (kongruent). **Die Punktspiegelvorschrift ist längentreu und winkeltreu**, sie bildet Dreiecke auf kongruente Dreiecke ab.



- Beim Drehen von Geraden haben wir festgestellt, daß bei einem Drehwinkel von 180 Grad, Ur- und Bildgeraden zueinander parallel sind. Das wollen wir uns noch einmal genauer ansehen. Dazu definieren wir zunächst das **Makro Punktspiegeln-Gerade**:

Eingabeobjekte: Spiegelpunkt S, Punkte A und B auf g  
Zielobjekte: Bildgerade g'

Jetzt zeichnen wir eine "Gerade durch 2 Punkte" g<sub>1</sub> und konstruieren eine dazu parallele Gerade g<sub>2</sub>; g<sub>1</sub> und g<sub>2</sub> bilden zusammen einen Streifen, den wir an S spiegeln. Außerdem zeichnen wir eine "Gerade" h mit 2 "Punkten auf Objekt", (damit wir die Gerade ebenfalls an S spiegeln können) und ihre Bildgerade h'.



Anschließend variieren wir die Figuren, indem wir g<sub>1</sub> drehen und h parallel verschieben. Wir beobachten: g<sub>1</sub>' ist stets parallel zu g<sub>1</sub>, g<sub>2</sub>' ist stets parallel zu g<sub>2</sub> und zu g<sub>1</sub>', h' ist stets parallel zu h. Gehen die Geraden g<sub>1</sub>, g<sub>2</sub> oder h durch den Spiegelpunkt S, dann sind sie gleich ihren Bildgeraden g<sub>1</sub>', g<sub>2</sub>' bzw. h'. Zusammenfassend:

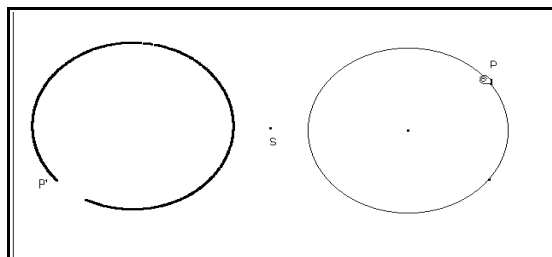
Jede Bildgerade ist parallel zu ihrer Urgeraden.

Jeder Streifen wird wieder auf einen (sogar dazu parallelen) Streifen abgebildet.

Jede Gerade durch den Spiegelpunkt ist eine Fixgerade.

Die erste dieser drei Eigenschaften ist so wichtig, daß man ihr einen eigenen Namen gegeben hat. Man sagt: Punktspiegeln ist eine **perspektive Vorschrift**.

- Mit Hilfe der zweischrittigen Ortslinien-Strategie stellen wir schließlich fest: **Punktspiegeln ist kreistreu.** Außerdem beobachten wir beim Markieren der Bildfigur mit der Option Ortslinie: **Punktspiegeln ist orientierungstreu.**



Zuletzt definieren wir das **Makro Punktspiegeln-Kreis:**

Eingabeobjekte:	Spiegelpunkt S, Kreismittelpunkt M, Kreispunkt A
Zielobjekt:	Bildkreis k'

## PUNKTSYMMETRISCHE FIGUREN

Eine Strecke mit den Endpunkten A und B wird an einem Punkt S gespiegelt; die Endpunkte der Bildstrecke sollen C und D heißen. Die Bildstrecke ist zur Urstrecke parallel und gleichlang. Anschließend wird die Strecke mit den Endpunkten A und D an S gespiegelt, wegen der Wechselseitigkeit der Punktspiegelvorschrift hat sie die Strecke [CD] als Bild. Die Figur ist ein Viereck. Weil beim Punktspiegeln jede Strecke zu ihrer Bildstrecke parallel ist, heißt das Viereck **Parallelogramm**.

Weitere Eigenschaften des Parallelogramms, die man der Konstruktion entnehmen kann: Gegenüberliegende Seiten sind gleichlang, gegenüberliegende Winkel sind gleichgroß, die Diagonalen halbieren einander. Auch diesen Satz entnimmt man der Konstruktion: Sind bei einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleichlang, dann ist es ein Parallelogramm.

Punkt A mit der Zugschleife greifen und stetig verändern. Es ergeben sich Sonderfälle:

- Die Diagonalen [AC] und [BD] sind gleichlang, die Figur ist ein **Rechteck**.
- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, die Figur ist eine **Raute**.
- Die Diagonalen sind gleichlang und stehen senkrecht aufeinander, die Figur ist ein **Quadrat**.

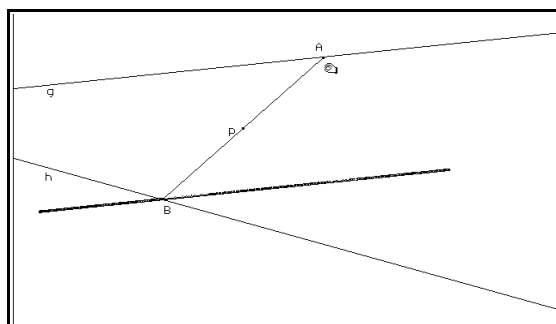
## EINE AUFGABENFAMILIE

**Die Grundaufgabe:** Gegeben sind ein Punkt P und zwei Geraden g und h. Gesucht ist eine Strecke [AB], deren Endpunkte auf g bzw. h liegen und die durch P halbiert wird.

**Lösungsstrategie:** Da P die gesuchte Strecke halbieren soll, kann man P als Spiegelpunkt und die Punkte A und B als Ur- und Bildpunkte einer Punktspiegelung auffassen (Punktspiegeln als Konstruktionsmittel). Da es sich außerdem um eine Inzidenzaufgabe handelt, kann man die Strategie für Inzidenzaufgaben anwenden: Eine der drei Bedingungen (die Bedingung für B) zunächst weglassen, eine zweite (die Bedingung für A) variabel gestalten und die Ortslinie für den freien Punkt (das ist der Punkt B, dessen Bedingung zunächst weggelassen wurde) markieren.

Also:

- (1) Die Geraden g ("Gerade"), h ("Gerade durch 2 Punkte") und den Punkt P ("Punkt") zeichnen
- (2) Eine Strecke [AB] so zeichnen:
  - Einen Punkt auf g legen ("Punkt auf Objekt") und A nennen
  - A an P spiegeln (Makro Punktspiegeln), den Bildpunkt B nennen
  - Die Strecke [AB] zeichnen
- (3) Die Option ORTSLINIE aufrufen, den Punkt B anklicken, den Punkt A greifen und auf g wandern lassen.

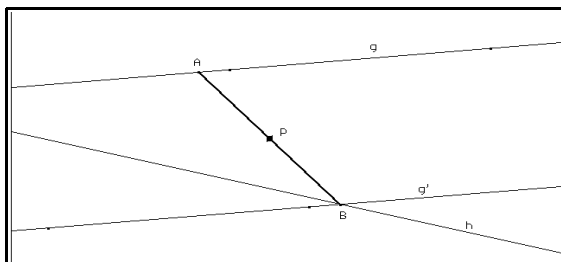


Der Punkt B markiert die Bildgerade  $g'$  von  $g$  bei Punktspiegelung an P. Daraus ergibt sich das Konstruktionsverfahren für B und A:

- (4) Die Gerade  $g'$  konstruieren (Makro Punktspiegeln-Gerade). Die Geraden  $h$  und  $g'$  schneiden ("Schnitt"), den Schnittpunkt B nennen. B an P punktspiegeln ergibt A.

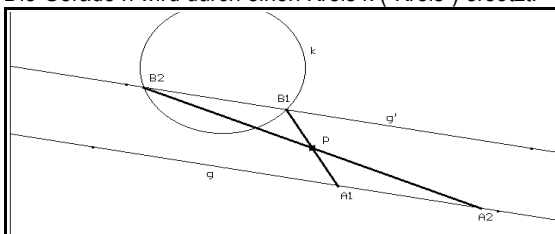
Zur Fallunterscheidung variieren wir die Parameter  $g$  (verschieben),  $h$  (drehen) und P. Wir sehen:

- Ist  $g$  nicht parallel zu  $h$ , so gibt es genau 1 Lösungs-Strecke,
- ist  $g$  parallel zu  $h$ , so ist jede Strecke  $[AB]$  durch P eine Lösung, sofern P ein Punkt der Mittelparallelen des von  $g$  und  $h$  gebildeten Streifens ist. Sonst gibt es keine Lösung.



#### Erste Variation der Grundaufgabe:

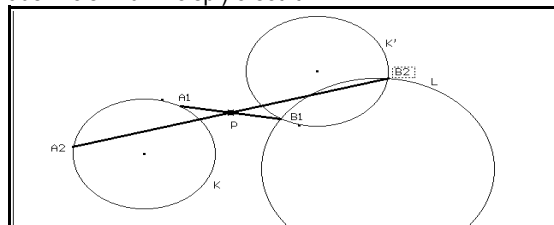
Die Gerade  $h$  wird durch einen Kreis  $k$  ("Kreis") ersetzt.



Zur Fallunterscheidung verändern wir  $g$  (drehen) und/oder  $k$  (verschieben) stetig und stellen fest: Es gibt 2, 1 oder keine Lösung je nachdem, ob sich  $g$  und  $k$  schneiden, berühren oder meiden.

#### Zweite Variation der Grundaufgabe:

$g$  und  $h$  werden durch Kreise  $k$  ("Kreis") und  $l$  ("Kreis aus Kreism. u. Kreisp.") ersetzt.



Zur Fallunterscheidung verändern wir  $k$  (verschieben) und  $l$  stetig und stellen fest: Es gibt 2, 1 oder keine Lösung je nachdem, ob sich  $k$  und  $l$  schneiden, berühren oder meiden. Für  $k=l$  gibt es beliebig viele Lösungen.

Dritte Variation der Grundaufgabe: Es handelt sich um eine Variante der 2-Kreis-Aufgabe. Die beiden Kreise  $k$  und  $l$  sollen sich schneiden und P soll einer der beiden Schnittpunkte sein.

Vierte Variation der Grundaufgabe: Die beiden Geraden  $g$  und  $h$  der Grundaufgabe sollen sich auf dem Zeichenblatt schneiden. Dann wird die Aufgabe gewöhnlich so formuliert: Gegeben ist ein Winkel und ein Punkt P innerhalb des Winkels. Gesucht ist eine Strecke, deren Endpunkte auf den Schenkeln des Winkels liegen und die durch P halbiert wird.

Wichtig für das Verstehen, Befolgen und Erstellen von Abbildungs- und Konstruktionsvorschriften ist es, ihre Struktur zu kennen und darin denken zu lernen. Sie läßt sich in den drei Fragen **Was? Wie? Womit?** zusammenfassen.

- **Was?** - Zunächst muß man sich beim Lesen und Befolgen oder Erstellen einer Vorschrift im klaren darüber sein bzw. werden, welche Objekte (Punkt, Gerade, Kreis, ....) gezeichnet/konstruiert werden sollen. Das ist eine strategische Frage, also eine Frage im Zusammenhang mit der Lösungsstrategie. Oft wird man beim Erstellen einer Vorschrift eine Überlegungsfigur dazu benötigen und auch nach Versuch und Irrtum vorgehen müssen. ("Versuch und Irrtum" muß jetzt nicht mehr in Gedanken, sondern kann mit dem Cabri visuell auf dem Bildschirm durchgeführt werden!) Die Antworten auf die Fragen "Was?" bilden die im Text mit (1), (2), (3), ..... durchnummerierten Konstruktionsziele. Sie stellen damit Überschriften für Teilprogramme dar; jede Vorschrift ist also in Teilprogramme gegliedert.

- **Wie?** - Zum Befolgen oder Ersellen eines Teilprogramms muß man wissen, auf welchem Weg das im Konstruktionsziel genannte Objekt konstruiert werden kann. Die Frage "Wie?" ist demnach eine taktische Frage.

Beim Erstellen einer Vorschrift wird man den zum Ziel führenden Konstruktionsweg oft mit Versuch und Irrtum finden müssen, wobei sich die Fragen nach Ziel und Weg gegenseitig bedingen können, weil ja auch die Gegebenheiten des Werkzeugs einfließen.

Im Text der Abbildungs- und Konstruktionsvorschriften handelt es sich bei den Antworten auf die Frage "Wie?" um die Folgen von mit Spiegelstrichen versehenen Handlungsanweisungen; sie sind gegenüber den nummerierten Überschriften eingerückt.

- **Womit?** - Diese Frage bezieht sich auf das Werkzeug, beim Cabri also auf die Option, die aufgerufen werden muß, um eine bestimmte Handlungsanweisung durchführen zu können.. Es handelt sich damit um eine handwerkliche Frage.

In diesem Buch sind die Antworten auf die Fragen "Womit?" in kursiver Schrift in Klammern jeder Handlungsanweisung hinzugefügt.

Durchführen und Erstellen von Abbildungs- und Konstruktionsvorschriften erziehen zu strukturellem Denken. Die Bildung strukturellen Denkens ist ein wichtiges Lernziel des Geometrieunterrichts.